

Un peu de Physique ... pour comprendre le monde moderne (2019 – cours avancé)

Bernard Remaud

bernard.remaud@univ-nantes.fr

Manuel de survie en Maths

Les nombres réels (suite)

La notation scientifique simplifie les multiplications et divisions des grands et petits nombres, selon la règle:

$$a 10^x * b 10^y = a * b 10^{x+y}$$

$$\frac{a 10^x}{b 10^y} = \frac{a}{b} 10^{x-y}$$

Par exemple, la constante (dite de structure fine) est basée sur :

$$\frac{e^2}{\hbar c}$$

Avec :

e la charge élémentaire $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C (Coulomb)

c la vitesse de la lumière $c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s

\hbar la constante de Planck (divisée par 2π) $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ J.s

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1,602 * 1,602 \cdot 10^{-38}}{1,055 \cdot 10^{-34} * 2,998 \cdot 10^8} = \frac{1,602 * 1,602}{1,055 * 2,998} 10^{-38+34-8} = 0,811 \cdot 10^{-12} \quad (\text{C}^2 \cdot \text{C}/\text{J}\cdot\text{m})$$

Les nombres réels (suite)

La notation scientifique est indispensable, par exemple pour calculer les unités de Planck à partir desquelles, il est nécessaire d'unifier la Mécanique Quantique et la Relativité Générale

On part des grandeurs fondamentales

c la vitesse de la lumière

$$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ km/s}$$

\hbar la constante de Planck (divisée par 2π)

$$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

G la constante de gravitation

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$$

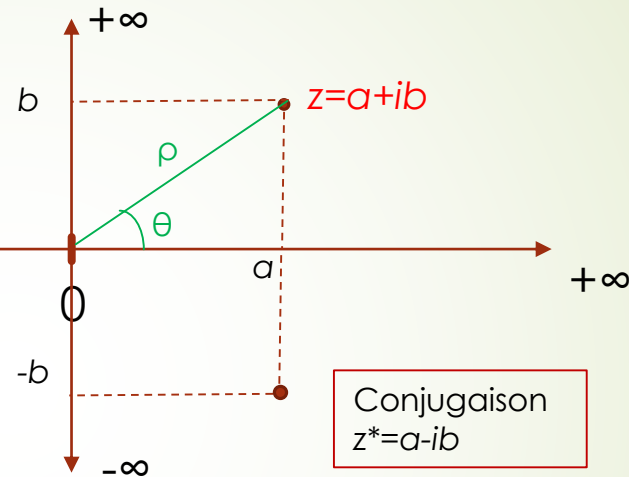
- La longueur de Planck $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ $l_P = 1,616 \cdot 10^{-35} \text{ m}$
- La masse de Planck $m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ $m_P = 2,177 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$
- Le temps de Planck $t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$ $t_P = 2,177 \cdot 10^{-44} \text{ s}$

Note :

- le temps de Planck t_P est le temps que met la lumière pour parcourir la longueur de Planck
- L'énergie de Planck $E_P = m_P c^2 = 6,53 \cdot 10^8 \text{ J}$ (joules)

Les nombres imaginaires ou complexes sont des couples de nombres

Notation cartésienne
 (a, b)
 a partie réelle
 b partie imaginaire



Notation polaire
 (ρ, θ)
 Module $|z|^2 = \rho^2 = a^2 + b^2$

Conjugaison
 $z^* = a - ib$

La notation polaire $z = |z|e^{i\theta}$ facilite la multiplication

$z^* = |z|e^{-i\theta} \quad \longrightarrow \quad |z|^2 = z z^*$

$z_1 = |z_1|e^{i\theta_1} \quad z_2 = |z_2|e^{i\theta_2} \quad \longrightarrow \quad z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

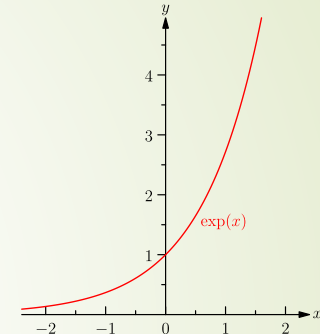
Les fonctions (exponentielle, logarithmique et trigonométriques)

La fonction exponentielle

$$x \rightarrow \exp(x) = e^x$$

Est la seule fonction qui est égale à sa propre dérivée

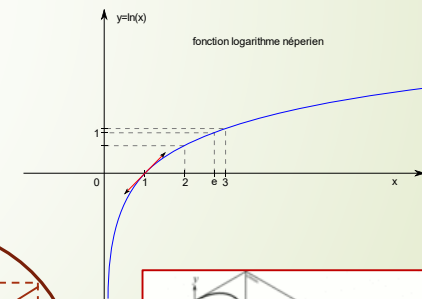
$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$



La fonction logarithme

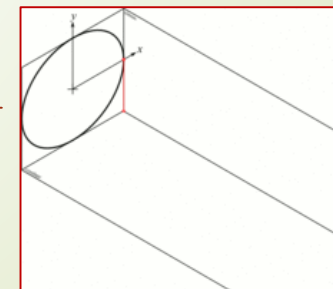
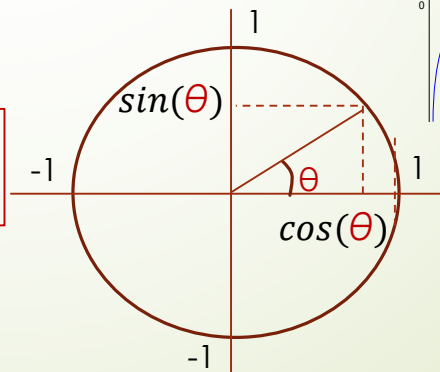
$$x \rightarrow \ln(x), \text{ définie pour } x \text{ positif}$$

$$\text{Si } y = e^x \text{ alors } x = \ln(y)$$



Les fonctions trigonométriques

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$



Les Fonctions (2): la dérivation

7

Considérons une fonction qui dépend du temps $x(t)$; pour calculer la façon dont elle varie pendant un intervalle Δt ; on calcule le rapport :

$$v(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$$

On appelle dérivée (si elle existe), la limite lorsque $\Delta t \rightarrow 0$; que l'on note $\frac{dx(t)}{dt}$. La dérivée correspond à la pente de la droite tangente à la fonction au point t .

Par exemple, pour la fonction $x(t) \rightarrow t^2$;

$$x(t + \Delta t) \rightarrow t^2 + 2t \Delta t + \Delta t^2$$

$$\text{donc } \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = 2t + \Delta t$$

La limite $\Delta t \rightarrow 0$ est $\frac{d(t^2)}{dt} = 2t$.

Cela se généralise, à la dérivée seconde (dérivée de la dérivée) etc..

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt}$$

Les Fonctions (3): la dérivation

8

Lorsque une fonction dépend de plusieurs variables, comme $u(x, t)$; on note la dérivation par rapport à une seule variable

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \text{ OU } \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

Les principales dérivées

Fonctions	Dérivées	Remarques
t^n	nt^{n-1}	n entier
$\ln(t)$	$\frac{1}{t}$	$t > 0$
e^t	e^t	Parfois noté $\exp(t)$
$\sin \omega t$	$\omega \cos \omega t$	
$\cos \omega t$	$-\omega \sin \omega t$	
e^{at}	ae^{at}	Le cas $a = i$ est fréquent
$10^t = e^{\ln(10)t}$	$\ln(10) 10^t$	

Les Fonctions (4): l'intégration

9

Lorsqu'elles existent, on appellera $X(t)$ primitive de $x(t)$ si

$$\frac{dX(t)}{dt} = x(t)$$

L'intégrale définie de la fonction $x(t)$ entre 2 points a et b est :

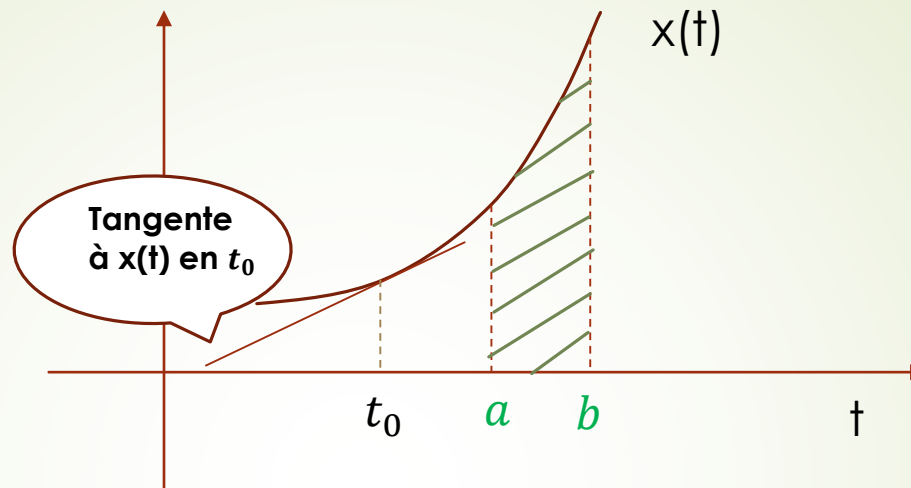
$$\int_a^b x(t) dt = X(b) - X(a)$$

Les principales primitives

Fonctions	primitives	Remarques
t^n	$\frac{t^{n+1}}{n+1}$	$n \neq -1$
$\frac{1}{t}$	$\ln(t)$	$t > 0$
$\ln(t)$	$t \ln(t) - t$	$t > 0$
e^t	e^t	Parfois noté $\exp(t)$
$\sin \omega t$	$-\frac{1}{\omega} \cos \omega t$	
$\cos \omega t$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$	
e^{at}	$\frac{1}{a} e^{at}$	Le cas $a = i$ est fréquent

Les Fonctions (5): dérivation- intégration

10



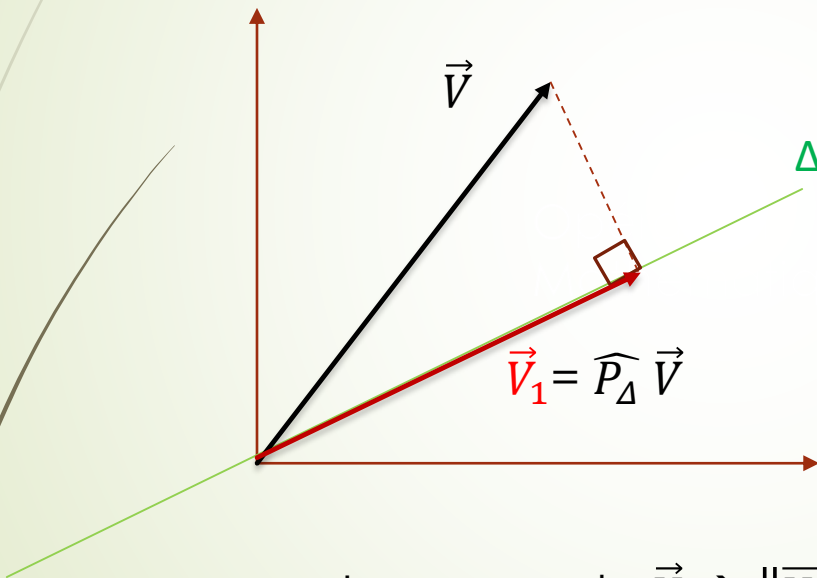
La **pente de la droite tangente** à $x(t)$ en t_0 est la dérivée $\frac{dx(t)}{dt}$ calculée au point t_0

L'aire **hachurée** sous la courbe $x(t)$ est l'intégrale définie

$$\int_a^b x(t) dt = X(b) - X(a)$$

Où $X(t)$ est la primitive de $x(t)$

Calculer la longueur d'un vecteur \vec{V} projeté sur une droite Δ



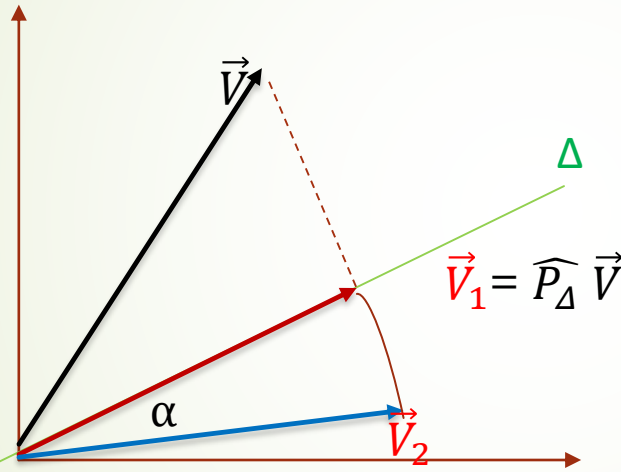
$$\vec{V}_1 = \widehat{P}_\Delta \vec{V}$$

L'opérateur modifie le vecteur initial

$$\vec{V}_1 = \widehat{P}_\Delta \vec{V}$$

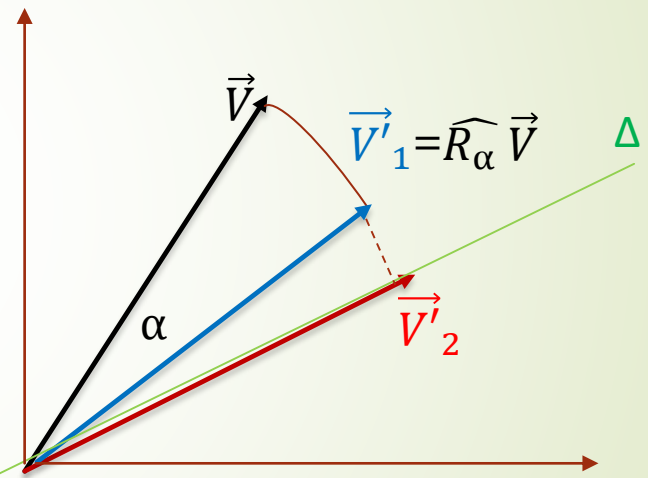
Longueur de $\vec{V}_1 \rightarrow \|\vec{V}_1\|$ est une fraction de $\|\vec{V}\|$

Les opérateurs peuvent être non commutatifs:
 \widehat{P}_Δ opérateur de projection sur une droite
 \widehat{R}_α opérateur de rotation d'un angle α



$$\vec{V}_2 = \widehat{R}_\alpha \vec{V}_1 = \widehat{R}_\alpha \cdot \widehat{P}_\Delta \vec{V}$$

Projection suivie d'une rotation



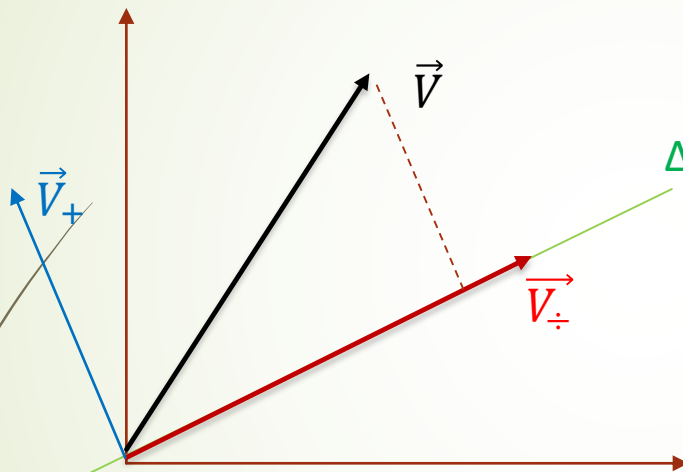
$$\vec{V}'_2 = \widehat{P}_\Delta \vec{V}'_1 = \widehat{P}_\Delta \cdot \widehat{R}_\alpha \vec{V}$$

Rotation suivie d'une projection

$$\vec{V}_2 \neq \vec{V}'_2 \rightarrow \widehat{R}_\alpha \cdot \widehat{P}_\Delta \vec{V} \neq \widehat{P}_\Delta \cdot \widehat{R}_\alpha \vec{V}$$

Les opérateurs rotation et projection ne sont pas commutatifs

Pour chaque opérateur, il existe une famille de vecteurs pour lesquels l'opérateur ne change pas la direction, mais seulement la longueur du vecteur : **les vecteurs propres**



Pour l'opérateur projection \widehat{P}_Δ , il y a 2 familles de vecteurs propres:

- Les vecteurs parallèles \vec{V}_+
 $\widehat{P}_\Delta \vec{V}_+ = 1 \vec{V}_+$
 Ils ont la **valeur propre 1**

- Les vecteurs perpendiculaires \vec{V}_+
 $\widehat{P}_\Delta \vec{V}_+ = 0 \vec{V}_+$
 Ils ont la **valeur propre 0**

Un vecteur \vec{V} quelconque est une combinaison des 2 vecteurs propres

$$\vec{V} = a \vec{V}_+ + b \vec{V}_+$$

$$\widehat{P}_\Delta \vec{V} = 1 * a \vec{V}_+ + 0 * b \vec{V}_+ = a \vec{V}_+$$

Ceci est une analogie de la mesure en mécanique quantique (voir suite du cours)

Un peu de Physique pour comprendre le monde moderne

Merci

bernard.remaud@univ-nantes.fr