Un peu de Physique … pour comprendre le monde moderne

Bernard Remaud

bernard.remaud@univ-nantes.fr
https://un-peu-de-physique.fr/

Manuel de survie en Maths

Les nombres

Entiers naturels de 0 à ∞

Exemples : 1 5 1490

0 +1 +2 +3

-∞ … -2 -1 0 +1 +2 +3 … +∞

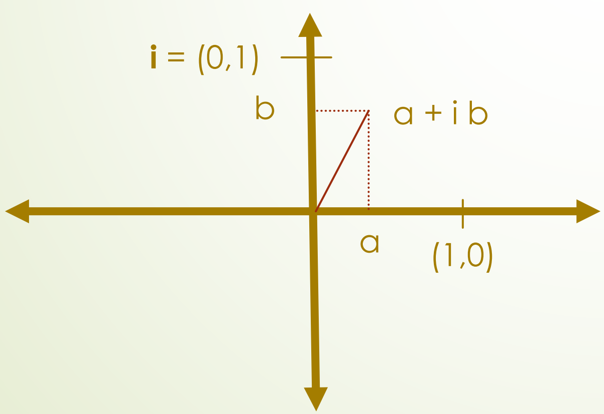
Entiers relatifs de - ∞ à +∞

Exemples : -1 5 -12

-∞ 0 +∞

Nombres réels de - ∞ à +∞

Exemples : -1,0 2/3 π $\sqrt{2}$



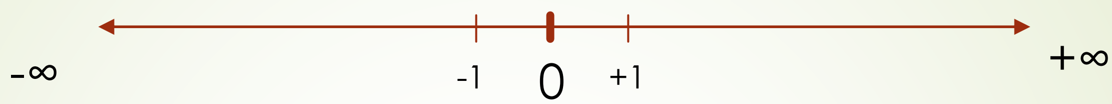
Nombres complexes

Exemples : (1,0) (0,1) $\sqrt{-1}$

Les nombres (1)

Les nombres réels

Les nombres réels vont de -∞ à +∞; on peut les représenter par des points sur une droite (on parle de la droite « réelle »).



La notation usuelle est la notation décimale 4,57 ou -3,14 :

notation française, les anglo-saxons mettent un point; la virgule est le séparateur des milliers, c'est l'espace en France 3 000,15 (FR)←→ 3,000.15(USA).

Pour les grands et petits nombres, notation scientifique, par ex :

- Masse de l'électron = $9{,}1\ 10^{-31}$kg

l'exposant -31 est le nombre de décalage vers la droite en complétant par des zéros les espaces vides après la virgule

$9{,}1\ 10^{-1}$ = 0,91; $9{,}1\ 10^{-2}$ = 0,091;

$9{,}1\ 10^{-31} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 9$

- Une année lumière = $9{,}461\ \ 10^{12}$ km,

l'exposant +12 est le nombre de décalage vers la gauche, en complétant par des zéros les espaces vides devant la virgule

$9{,}461\ \ 10^{12}$= 9 461 000 000 000 km

Les nombres réels (suite)

La notation scientifique simplifie les multiplications et divisions des grands et petits nombres, selon la règle:

$$a\ 10^x * b\ 10^y = a * b\ 10^{x+y}$$

$$\frac{a\ 10^x}{b\ 10^y} = \frac{a}{b} 10^{x-y}$$

Par exemple, la constante (dite de structure fine) est basée sur :

$$\frac{e^2}{\hbar c}$$

Avec :

e la charge élémentaire e= $1{,}602\ 10^{-19}$ C (Coulomb)
c la vitesse de la lumière c = 2,998 10^8 m/s
$\hbar$ la constante de Planck (divisée par 2 π) $\hbar$= 1,055 10^{-34} J.s

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1{,}602 * 1{,}602\ 10^{-38}}{1{,}055\ 10^{-34} * 2{,}998\ 10^8} = \frac{1{,}602 * 1{,}602}{1{,}055 * 2{,}998} 10^{-38+34-8} = 0{,}811\ 10^{-12}$$ (C* C/J/m)

Les nombres réels (suite)

La notation scientifique est indispensable, par exemple pour calculer les unités de Planck à partir desquelles, il est nécessaire d'unifier la Mécanique Quantique et la Relativité Générale

On part des grandeurs fondamentales

- c la vitesse de la lumière — $c = 2{,}998\ 10^{8}$ km/s
- $\hbar$ la constante de Planck (divisée par 2 π) — $\hbar = 1{,}055\ 10^{-34}$ J.s
- G la constante de gravitation — $G = 6{,}674\ 10^{-11}$ m³/kg/s/s

- La longueur de Planck $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ $\quad l_P = 1{,}616\ 10^{-35}\ m$
- La masse de Planck $m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ $\quad m_P = 2{,}177\ 10^{-8}$ kg
- Le temps de Planck $t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$ $\quad t_P = 5{,}391\ 10^{-44}$ s

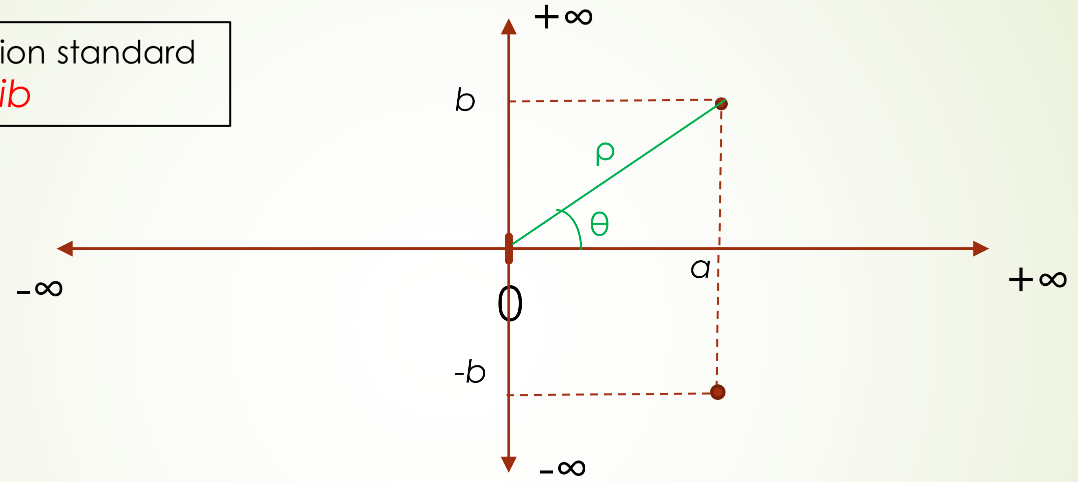
Note :

- le temps de Planck t_P est le temps que met la lumière pour parcourir la longueur de Planck
- L'énergie de Planck $E_P = m_p c^2$ $= 6{,}53\ 10^{8}$ J (joules)

Les nombres (4)

Les nombres imaginaires ou complexes sont des couples de nombres réels (a,b) dotés d'une loi de multiplication spécifique :

Notation standard
z=a+ib



Notation cartésienne
(a,b)
a partie réelle
b partie imaginaire

Notation polaire
(ρ, θ)
Module $|z|^2 = \rho^2 = a^2+b^2$

Les nombres (5)

Opérations sur les nombres complexes (selon la notation)

$z = a + ib \; ; \; z' = a' + ib' \qquad z = \rho\, e^{i\theta} ; \; z' = \rho' e^{i\theta'}$

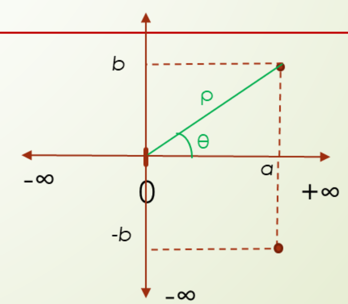
Addition
→ $z + z' = (a + a') + i(b + b')$; règle du parallélogramme, compliquée en polaire

Conjugaison
→ $z^* = a \; - ib$; ou en polaire $z^* = \rho\, e^{-i\theta}$ (noter que $i^* = -i$)

Module
→ $|z| = \sqrt{z\, z^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$; ou en polaire $|z| = \rho$

Multiplication
→ $z\, z' = (ab - bb') + i(ab' + a'b)$; ou en polaire $zz' = \rho\rho'\, e^{+i(\theta+\theta')}$

Division
→ compliquée en cartésien§ ; en polaire $\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} e^{+i(\theta-\theta')}$



§ En cartésien $\frac{z}{z'} = \frac{(aa'+bb')+i(ba'-ab')}{a'^2+b'^2}$

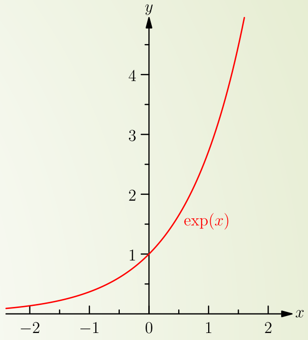
Les fonctions (exponentielle, logarithmique et trigonométriques)

La fonction exponentielle

$$x \rightarrow exp(x) = e^x$$

Est la seule fonction qui est égale à sa propre dérivée

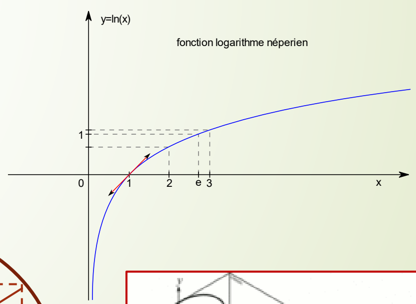
$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$



La fonction logarithme

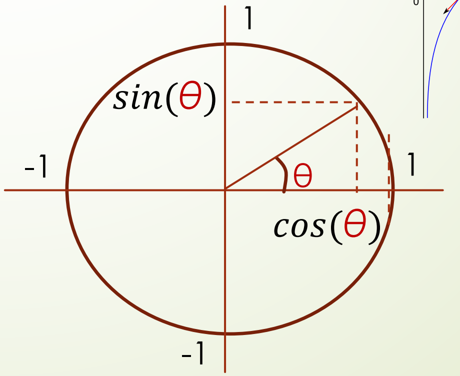
$x \rightarrow ln(x)$, définie pour x positif

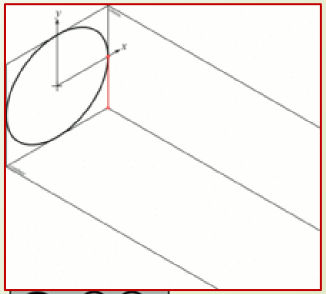
Si $y = e^x$ alors $x = ln(y)$



Les fonctions trigonométriques

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$





Les Fonctions (2): la dérivation

Considérons une fonction qui dépend du temps $x(t)$; pour calculer la façon dont elle varie pendant un intervalle Δt ; on calcule le rapport :

$$v\,(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$$

On appelle dérivée (si elle existe), la limite lorsque $\Delta t \to 0$; que l'on note $\frac{dx(t)}{dt}$. La dérivée correspond à la pente de la droite tangente à la fonction au point t.

Par exemple, pour la fonction $x(t) \to t^2$;

$$x(t+\Delta t) \to t^2 + \ 2t\,\Delta t + \ \Delta t^2$$

$$\text{donc } \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = 2t + \Delta t$$

La limite $\Delta t \to 0$ est $\frac{d(t^2)}{dt} = 2t$.

Cela se généralise, à la dérivée seconde (dérivée de la dérivée) etc..

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d(\frac{dx}{dt})}{dt}$$

Les Fonctions (3): la dérivation

Lorsque une fonction dépend de plusieurs variables, comme $u(x,t)$; on note la dérivation par rapport à une seule variable

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Les principales dérivées

Fonctions	Dérivées	Remarques
t^n	nt^{n-1}	$n\ entier$
$\ln(t)$	$\frac{1}{t}$	$t > 0$
e^t	e^t	Parfois noté $\exp(t)$
$\sin \omega t$	$\omega \cos \omega t$	
$\cos \omega t$	$-\omega \sin \omega t$	
e^{at}	ae^{at}	Le cas $a = i$ est fréquent
$10^t = e^{\ln(10)t}$	$\ln(10)\, 10^t$	

Les Fonctions (4): l’intégration

Lorsqu’elles existent, on appellera $X(t)$ primitive de $x(t)$ si

$$\frac{dX(t)}{dt} = x(t)$$

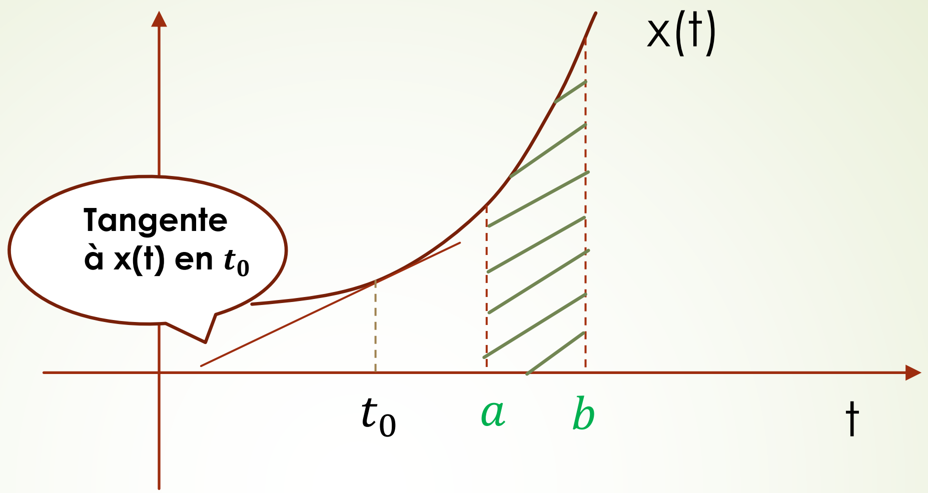
L’intégrale définie de la fonction $x(t)$ entre 2 points a et b est :

$$\int_a^b x(t)\,dt = X(b) - X(a)$$

Les principales primitives

Fonctions	primitives	Remarques
t^n	$\frac{t^{n+1}}{n+1}$	$n \neq -1$
$\frac{1}{t}$	$\ln(t)$	$t > 0$
$\ln(t)$	$t\ \ln(t) - t$	$t > 0$
e^t	e^t	Parfois noté $\exp(t)$
$\sin \omega t$	$\frac{-1}{\omega}\cos \omega t$	
$\cos \omega t$	$\frac{1}{\omega}\sin \omega t$	
e^{at}	$\frac{1}{a}e^{at}$	Le cas $a = i$ est fréquent

Les Fonctions (5): dérivation- intégration



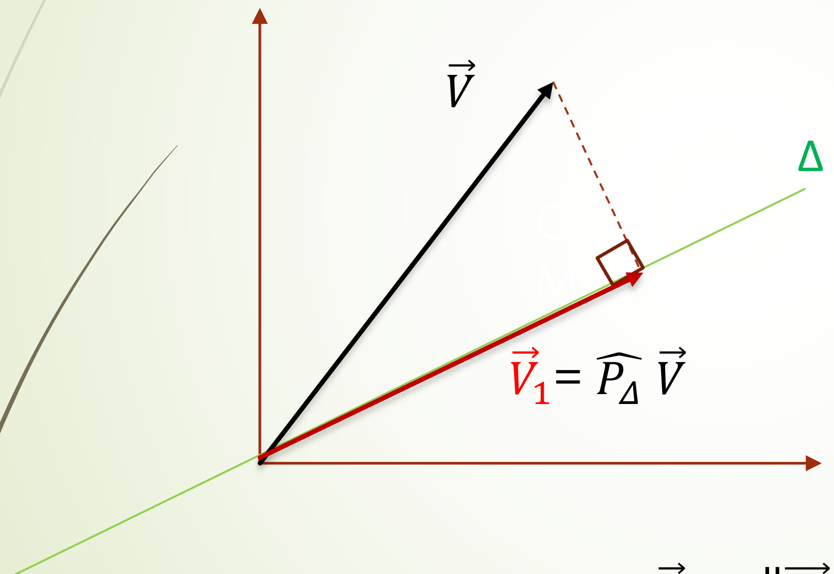
La pente de la droite tangente à $x(t)$ en t_0 est la dérivée $\frac{dx(t)}{dt}$ calculée au point t_0

L'aire hachurée sous la courbe $x(t)$ est l'intégrale définie

$$\int_a^b x(t)\, dt = X(b) - X(a)$$

Où $X(t)$ est la primitive de $x(t)$

Calculer la longueur d'un vecteur $\vec{V}$ projeté sur une droite Δ



$\vec{V}_1 = \widehat{P_\Delta}\ \vec{V}$

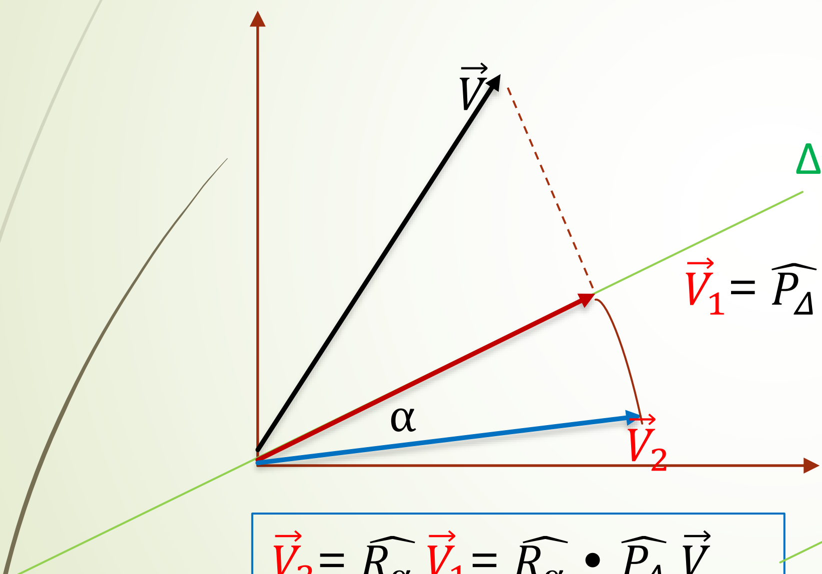
L'opérateur modifie le vecteur initial

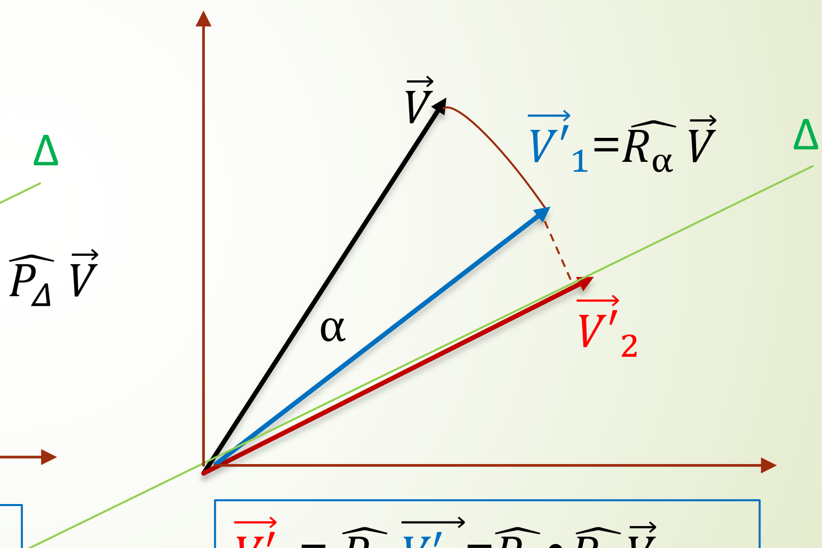
Longueur de $\vec{V}_1 \rightarrow \|\vec{V}_1\|$ est une fraction de $\|\vec{V}\|$

Les opérateurs peuvent être non commutatifs:

$\widehat{P_\Delta}$ opérateur de projection sur une droite

$\widehat{R_\alpha}$ opérateur de rotation d'un angle a





$\vec{V_2} = \widehat{R_\alpha}\,\vec{V_1} = \widehat{R_\alpha} \bullet \widehat{P_\Delta}\,\vec{V}$

Projection suivie d'une rotation

$\overrightarrow{V'_2} = \widehat{P_\Delta}\,\overrightarrow{V'_1} = \widehat{P_\Delta} \bullet \widehat{R_\alpha}\vec{V}$

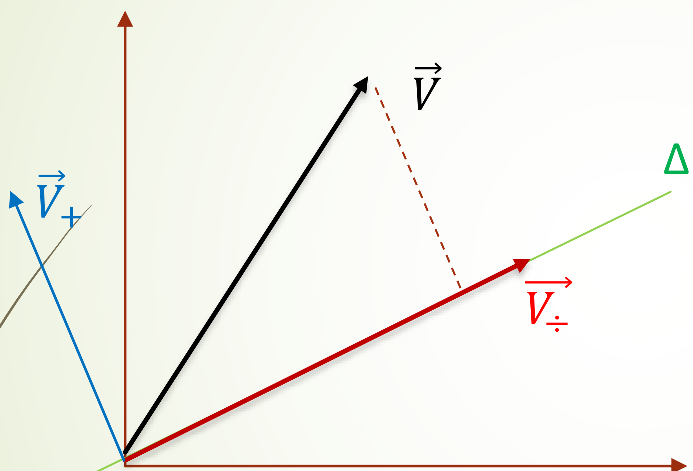
Rotation suivie d'une projection

$$\widehat{V_2} \neq \widehat{V_2'} \rightarrow \widehat{R_\alpha} \bullet \widehat{P_\Delta}\,\vec{V} \neq \widehat{P_\Delta} \bullet \widehat{R_\alpha}\vec{V}$$

Les opérateurs rotation et projection ne sont pas commutatifs

Opérateurs et vecteurs propres

Pour chaque opérateur, il existe une famille de vecteurs pour lesquels l'opérateur ne change pas la direction, mais seulement la longueur du vecteur : les vecteurs propres



Pour l'opérateur projection $\widehat{P_\Delta}$,
il y a 2 familles de vecteurs propres:

- Les vecteurs parallèles $\vec{V_\div}$

$$\widehat{P_\Delta}\ \vec{V_\div} = 1\ \vec{V_\div}$$

Ils ont la valeur propre 1

- Les vecteurs perpendiculaires

$$\widehat{P_\Delta}\ \vec{V_+} = 0\ \vec{V_+}$$

Ils ont la valeur propre 0

Un vecteur $\vec{V}$ quelconque est une combinaison des 2 vecteurs propres

$$\vec{V} = a\,\vec{V_\div} + b\,\vec{V_+}$$

$$\hat{P}_\Delta \vec{V} = 1 * a\,\vec{V_\div} + 0 * b\,\vec{V_+} = a\,\vec{V_\div}$$

Ceci est une analogie de la mesure en mécanique quantique (voir suite du cours)

Ne vous découragez pas, si vous ne comprenez pas tout !

« La science de Bernie »

La chaîne YouTube

Le blog

« Un peu de physique pour comprendre le monde »

bernard.remaud@univ-nantes.fr

https://www.un-peu-de-physique.fr

https://www.youtube.com/channel/UCdPBh5KXlol50MEV8p1DrlA/playlists

Un peu de Physique pour comprendre le monde moderne

Merci

bernard.remaud@univ-nantes.fr
https://un-peu-de-physique.fr/