Un peu de Science pour comprendre le monde moderne
Les ondes et nous

Bernard Remaud

bernard.remaud@univ-nantes.fr
https://www.un-peu-de-physique.fr

LA SCIENCE DE BERNIE

La chaîne YouTube

Le blog

Ch -4-

Les ondes et l'information

Interlude mathématique

Equation d'onde

- *une perturbation réversible d'un milieu (de l'eau par exemple) ou d'un champ (un champ électrique par exemple)*
- *qui se propage de proche en proche (effet domino)*
- *sans transport global de matière (uniquement transfert d'énergie)*

Les ondes sont décrites en mathématiques par l'équation différentielle (ici à une dimension)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Où

- $u(x,t)$ est l'amplitude du phénomène (qui dépend du temps et de la position ; positive ou négative)
- et c la vitesse de propagation de la perturbation

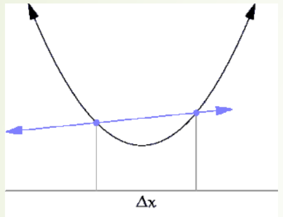
Equation de d'Alembert (1746)

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783)

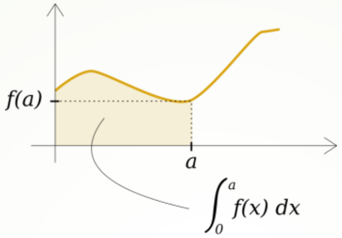
Equation d'onde et les autres

XVIIIème siècle et le calcul différentiel

Le match Newton – Leibniz (circa 1710)



Dérivation



Intégration

Source Newton & Leibniz

	Newton	Leibniz
Fonction	$f(x)$	y
Dérivée	$\dot{f}(x)$, ou $f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$
Intégrale	$\bar{x}$ ou $[x]$	$\int_a^b f(x)dx$

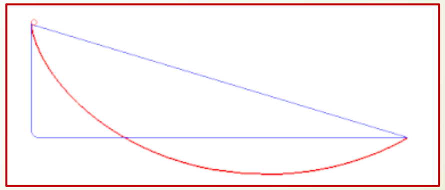
Dérivées partielles (EULER circa 1770)

Fonction de plusieurs variables

$$f(x,y) \to \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Les défis du calcul différentiel et intégral

- Le brachistochrone (Les frères Bernoulli, Newton, L'Hospital, Leibniz, …)
- La chaînette (Les frères Bernoulli, Newton, Leibniz, …)
- ….

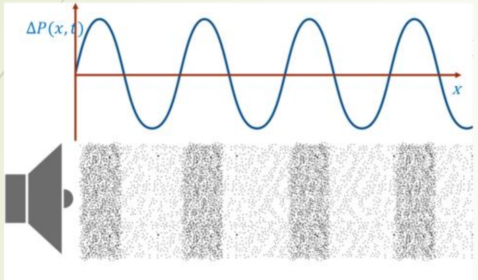


Le brachistochrone (wikipédia)

La chaînette (MathCurve)

Equation d'onde

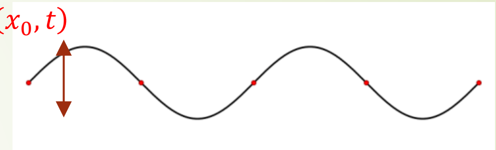
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$



$u(x,t)$ est l'amplitude de la perturbation autour de l'équilibre, positive ou négative :

- position d'un point de la corde,
- sur(sous) pression pour un son
- valeur du champ électromagnétique
- ....

$u(x_0,t)$



Corde d'un violon (wikipédia)

Les variations

Dans l'espace : $\frac{\partial u}{\partial x}$ → gradient(pente) ; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ → courbure   > 0   < 0

Dans le temps : $\frac{\partial u}{\partial t}$ → vitesse ; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ → accélération, résultat d'une force (Newton)

La courbure est source d'une force de rappel vers l'équilibre

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Equations aux dimensions

$$\frac{"u"}{L^2} \sim \frac{1}{(L^2/T^2)}\frac{"u"}{T^2}$$

Equation d'onde

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Propriétés remarquables:

- la réversibilité en temps et espace : $t \Leftrightarrow -t$ et $x \Leftrightarrow -x$.
- La linéarité : si $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ sont 2 solutions :
  $\alpha\, u_1(x,t) + \beta\, u_2(x,t)$ sont des solutions

Equation non-linéaire, non réversible (Korteweg - de Vries)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + 3\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x} = 0$$

Wikipédia - Mascaret

Le mascaret

Mer et Océan

Vague scélérate

Solutions de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Sens de propagation

Sa solution générale

$$u(x,t) = f(ct - x) + g(ct + x)$$

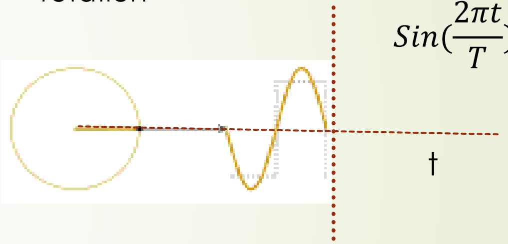
Formes des ondes

Joseph Fourier

Toute forme d'onde peut-être décomposée en une somme de sinus (cosinus)

T période de rotation

$Sin(\frac{2\pi t}{T})$



Sa solution générale est une combinaison de sinusoïdes se propageant en sens opposé

$$u(x,t) \sim \alpha \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right\} + \beta \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right\}$$

Sens de propagation

T est la période temporelle (en seconde)

λ est la longueur d'onde ou période spatiale (en mètre)

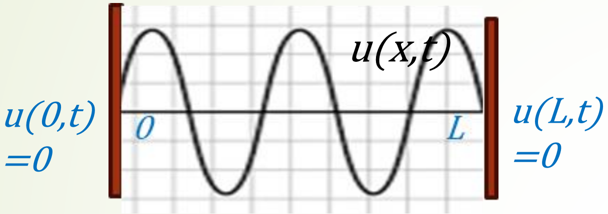
T et λ peuvent être quelconque du moment que $\lambda = cT$, avec c vitesse dépendant du milieu

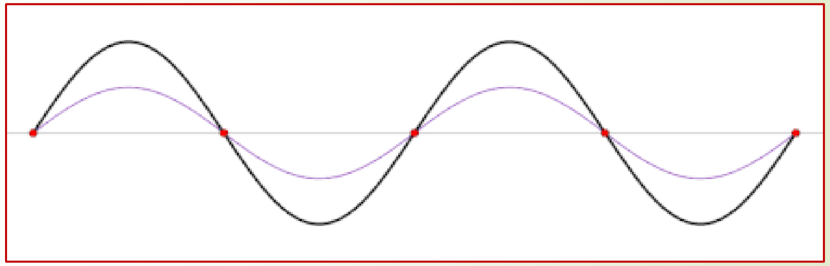
$$\lambda = cT = c/F$$

Les ondes stationnaires (1)

Corde de harpe, tuyau d'orgue, membrane de tambour, cymbale,...

Problème de Dirichlet (1850) : solution de $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ avec des conditions aux limites





Source : wikipedia

Conditions aux limites + onde réfléchie

$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) \sim \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ $\qquad$ $\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) \sim \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$ $\longrightarrow$ $u(x,t) \sim \sin 2\pi\frac{t}{T}\,\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}$

$$\mathrm{u}(L,t) = u(0,t) = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{2L}{n}, n = 1,2,\ldots$$

$$\longrightarrow F = n\left(\frac{c}{2L}\right), n = 1,2,\ldots$$

Seules certaines fréquences sont possibles

Les ondes stationnaires (2)

Conditions aux limites + onde réfléchie

$$u(x,t) \sim \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

$$F = n\left(\frac{c}{2L}\right), n = 1,2,\ldots$$

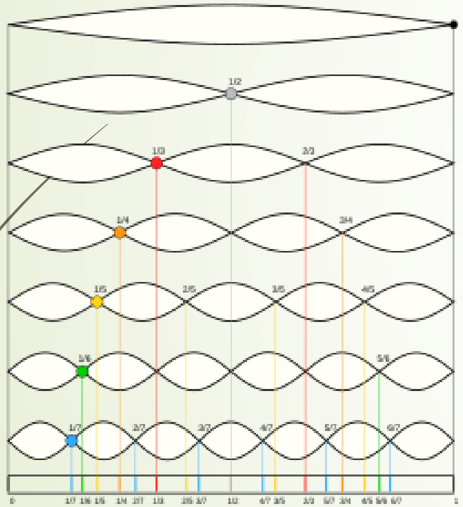
$F_0 = \frac{c}{2L}$ fondamental

$F_1 = \frac{c}{L}$ 1ère harmonique

$F_3 = \frac{3c}{2L}$ 1ère harmonique

Instruments à cordes

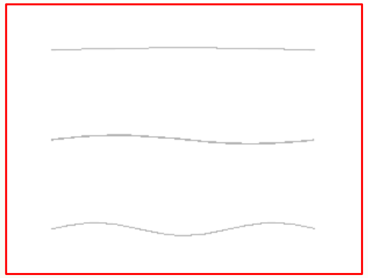
Source : Wikipédia – « Wave equations »



Fondamental *n =1*

1ère harmonique *n =2*

2ème harmonique *n =3*



n-1 = nombre de nœuds

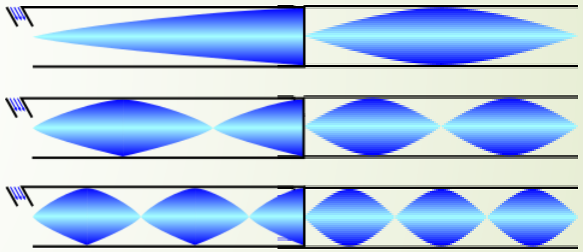
Piano

Source son

Harpe

Orgues, instrument à air : spectre selon ouvert ou fermé

Ouvert Fermé



Tuyau d'orgue (Wikipédia)

Tuyau de 10 mètres

Ouvert λ_{fond} = 40 m, F= 8,5 – 25,5 – 42,5 … Hz

Fermé λf_{ond} = 20 m, F= 17 – 34 – 51 … Hz

Nécessité d'une force de rappel

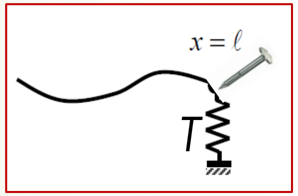
Volume fluide : compressibilité

$$V_s \propto \sqrt{\frac{1}{\chi\rho}}$$

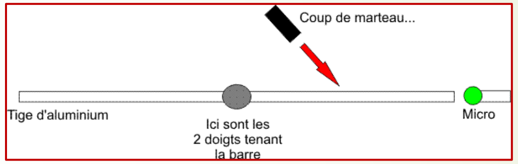
Compressibilité Densité

Corde tendue

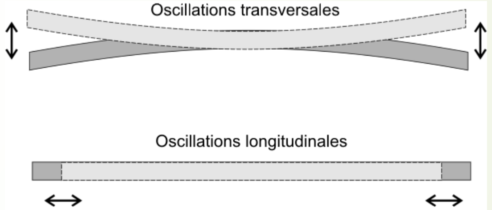
$$c = \sqrt{\frac{T}{m}}$$



Tige métallique



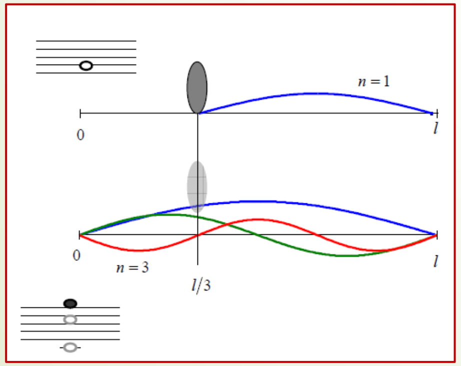
Oscillations transversales et longitudinales



$$V_s \propto \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Rigidité (module d'Young) Densité

Jouer du violon



Fondamental $c/2l$

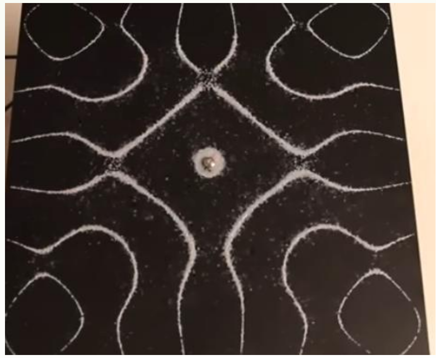
Une référence : cours ENSIM

Corde pincée au 2/3 : nouveau fondamental $3c/4l$
Les autres harmoniques sont amorties, sauf celle avec un nœud à $2l/3$
La 1ère harmonique non amortie : $3c/2l$

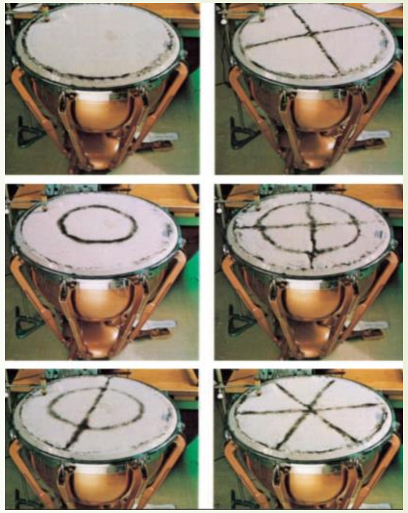
Les ondes à 2 ou 3 dimensions

Ondes stationnaires à 2 dimensions

A 2 dimensions, les modes sont très variés
Conditions aux limites libres
(Cliquer sur l'image)



Ondes stationnaires membrane



POUR LA SCIENCE - N° 234
AVRIL 1997

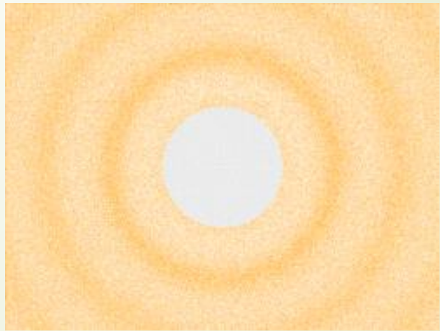
Ondes libres à 3 dimensions

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z;t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z;t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z;\ t)}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,y,z;t)}{\partial t^2}$$

Si isotrope (pas de contraintes spatiales) :

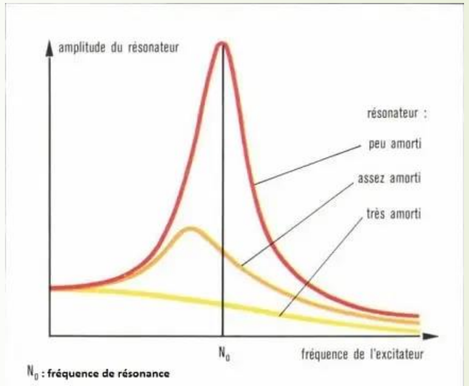
$$r^2=x^2+y^2+z^2$$

$$\frac{\partial^2 ru(r;\ t)}{\partial r^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\, ru(r;t)}{\partial t^2}$$



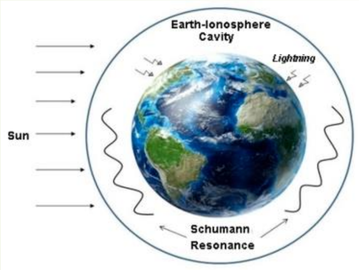
Systèmes avec des fréquences « propres » : $f_0, f_1, f_2, \ldots$
Si excitation périodique de faible énergie, avec une fréquence proche d'une fréquence propre du système → résonance

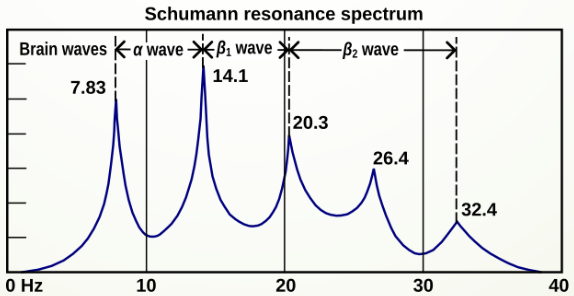
A la fréquence de résonance, le système accumule de manière cohérente l'énergie de l'excitation.
Il la dissipe – plus ou moins- selon les forces de frottements (amortissement)

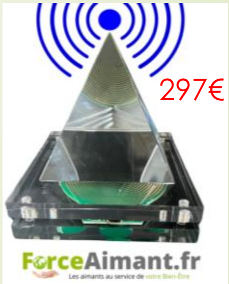


Crédit : Larousse

Les résonances de Schumann





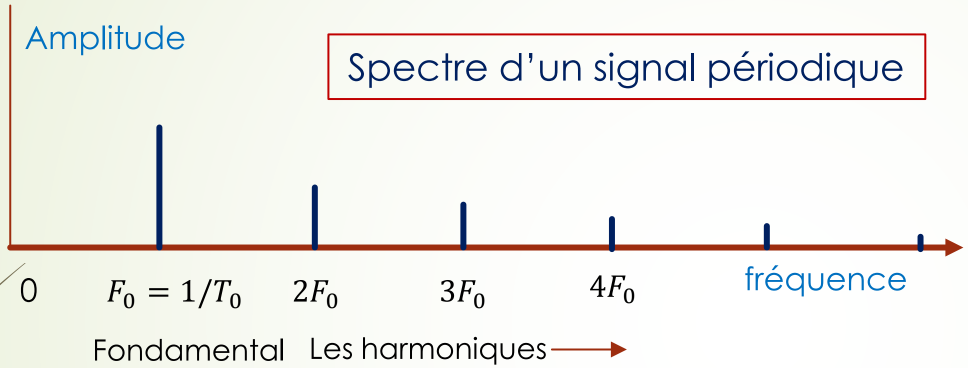


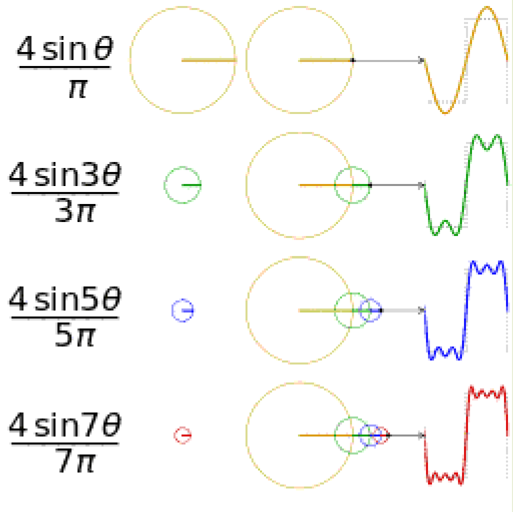
Résonances du champ magnétique terrestre excité (éclairs)

Les séries de Fourier

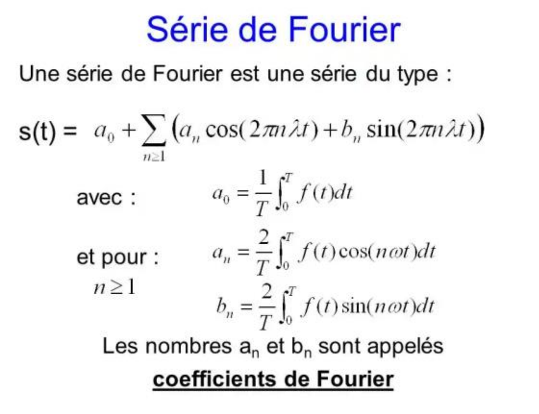
N'importe quelle fonction périodique peut se décomposer en une somme de sinusoïdes (fondamental + harmoniques)

Le spectre est le schéma (amplitude, fréquence)





Wikimedia



Série de Fourier

Une série de Fourier est une série du type :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos(2\pi n\lambda t) + b_n\sin(2\pi n\lambda t)\right)$$

avec : $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$

et pour : $n \geq 1$ $\quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$

Les nombres a_n et b_n sont appelés **coefficients de Fourier**

Les séries de Fourier – testez vous

Série de Fourier

Une série de Fourier est une série du type :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \cos(2\pi n\lambda t) + b_n \sin(2\pi n \lambda t)\right)$$

avec : $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

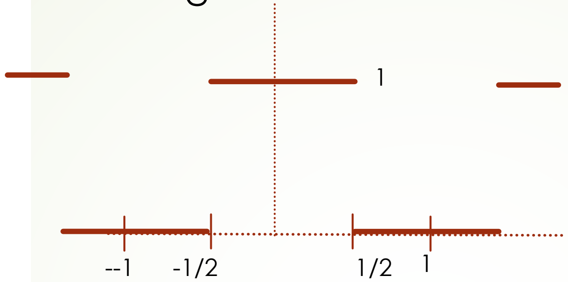
et pour : $n \geq 1$

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt$

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt$

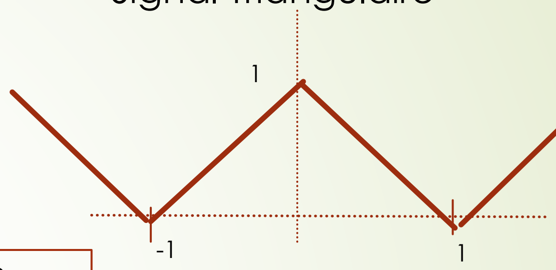
Les nombres a_n et b_n sont appelés **<u>coefficients de Fourier</u>**

Signal Carré



$$f(t) = 1\,; -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$$

Signal Triangulaire



$$f(t) = t+1 \;\; ; -1 < t < 0$$
$$f(t) = -t+1\,;\; 0 < t < 1$$

T=2

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} 1\, dt = 1/2$$

$$a_n = \int_{-1/2}^{1/2} 1\, \cos n\pi t\, dt = \left[\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\right]_{-1/2}^{1/2} ; n \geq 1$$

si n pair $a_n = 0$,

si n impair $\text{n} = 2p+1\,;\;\; a_{2p+1} = \frac{2}{(2p+1)\pi}$

$b_n = 0\ \forall n$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\, dt = 1/2$$

$$a_n = \int_{-1}^{0}(1+t)\cos n\pi t\, dt + \int_0^1(-t+1)\cos n\pi t\, dt\,; n \geq 1$$

si n pair $a_n = 0$,

si n impair $\text{n} = 2p+1\,;\;\; a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2\pi}$

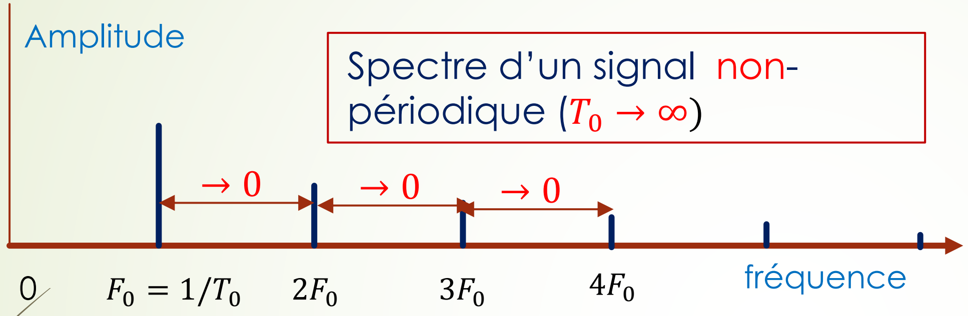
$b_n = 0\ \forall n$

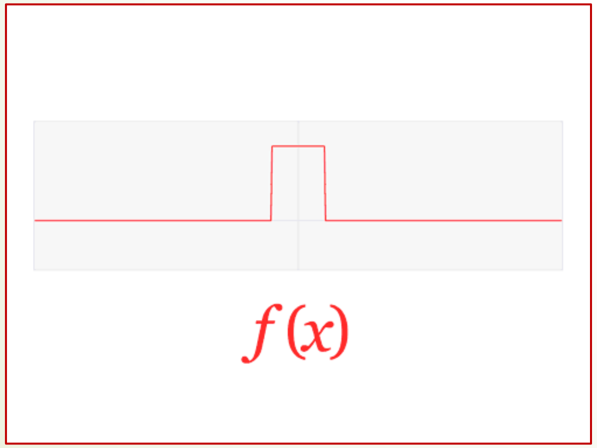
Conclusions ?

Les transformées de Fourier

→0

Signal non périodique

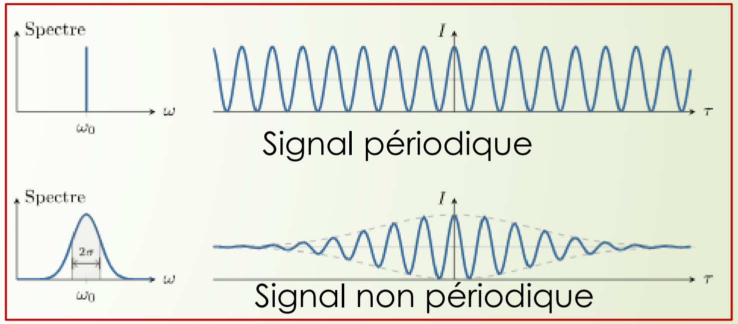




Wikimedia

Signal apériodique → spectre continu

$$\mathcal{F}(f) : \nu \mapsto \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\, \mathrm{d}t$$

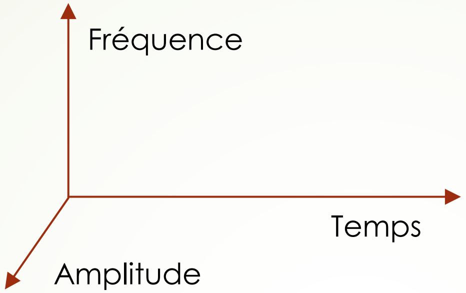


La largeur du spectre est inversement proportionnelle à la durée du signal

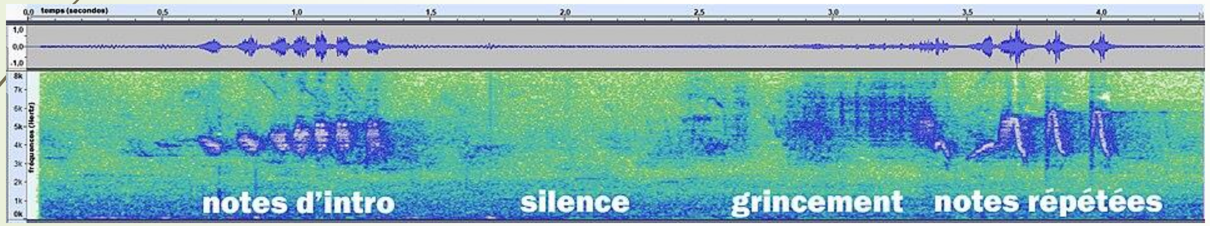
La transformée de Wigner-Ville

Signal non périodique, variable

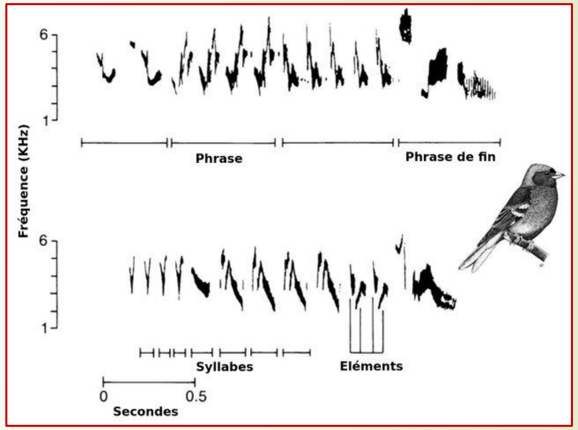
Sonogrammes



Reconnaissance des chants d'oiseaux
= reconnaissance de formes



Sonogrammes du chant du rougequeue noir - Wikimedia



Sonogramme- source

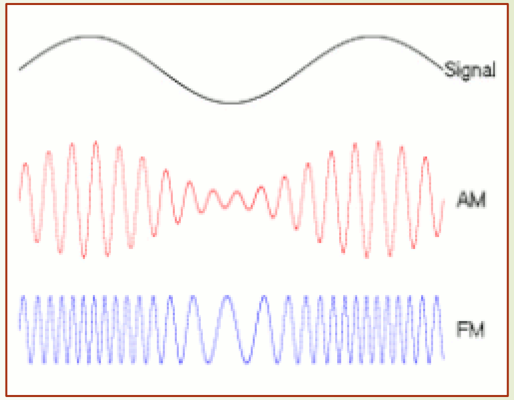
Logiciel Birdnet

Transmettre l'information (1)

Transmission analogique

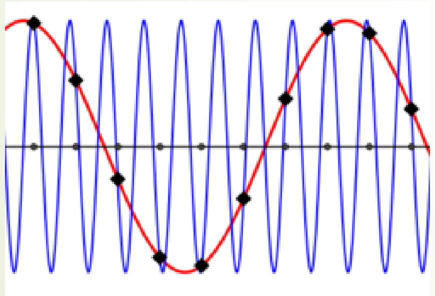
Transmettre un signal par onde porteuse

- Milieu de transmission fortement absorbant pour le signal d'origine.
- Modulation d'amplitude
- Modulation de fréquence

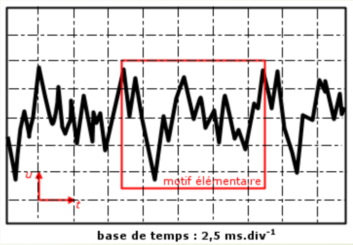


Transmission numérique

Numériser (coder en binaire) un signal analogique

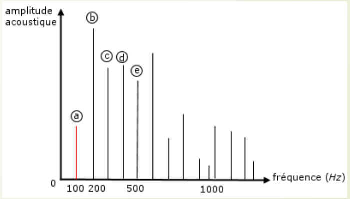


Wikipédia : [échantillonnage]



Théorème de Shannon

Fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale du signal.



Capacité de transmission d'un canal

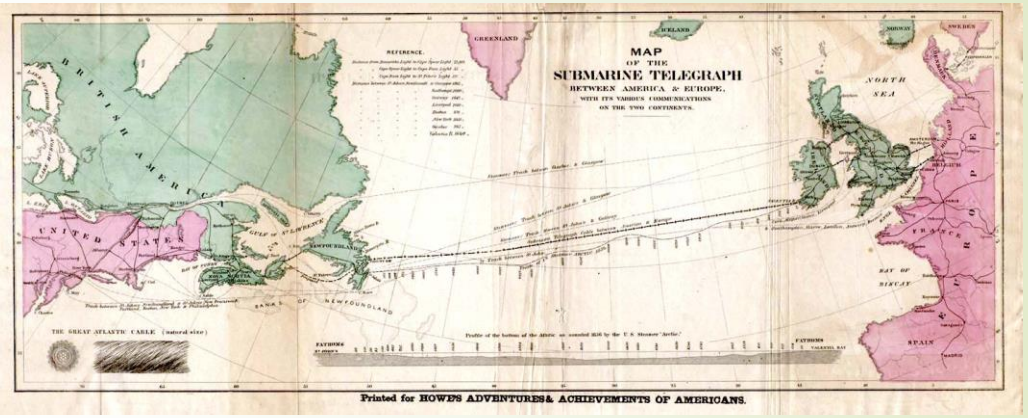
Rôle de la bande passante B : plage de fréquences transmises

Théorème de Shannon - Hartley

Le débit C d'une ligne (en bits/seconde) :

$$C = B\log_2(1+\frac{S}{N})$$

- B bande passante en Hertz
- S/N qualité du signal S par rapport au bruit N



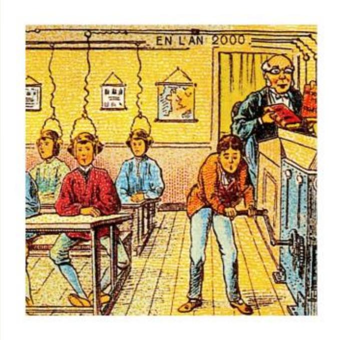
Premier câble transatlantique (1858)

Exemple : téléphonie classique,
B=4 000 Hz et rapport signal sur bruit de 20dB
→ C = 27kbits/s

Premier câble (1858) $C \sim 0{,}1\frac{mot}{mn} \sim 0{,}1 bit/s$
→ 17 heures pour transmettre le premier message en morse
« L'Europe et l'Amérique sont unies par la télégraphie, Gloire à Dieu au plus haut des cieux, paix et bonne volonté aux hommes sur Terre » (wikipédia)

Comment aborder un domaine si divers et si interdisciplinaire ?

Des vidéo conférences sur la chaîne YouTube : la Science de Bernie – Saison 3



Des podcasts sur Spotify
La science de Bernie

Mon blog https://un-peu-de-physique.fr/
Des cours, des ressources…